



LUDWIG-  
MAXIMILIANS-  
UNIVERSITÄT  
MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT



Wintersemester 2010

H. Donder, A. Fackler, P. Garcia

## Analysis III Tutorium

### Blatt 11

**Aufgabe 11.1.** Seien  $\varphi_1, \varphi_2 \in (\mathbb{R}^2)^*$  als  $\varphi_1 := 2dx - 3dy$  und  $\varphi_2 := dx + dy$  definiert. Berechnen Sie  $\varphi_1 \wedge \varphi_2((a_1, a_2), (b_1, b_2))$  für  $((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ .

**Aufgabe 11.2.** Sei  $\omega$  eine  $k$ -differentialform. Dann

- i.  $k$  ungerade  $\Rightarrow \omega \wedge \omega = 0$ .
- ii.  $k$  gerade  $\nRightarrow \omega \wedge \omega = 0$ .

**Aufgabe 11.3.** Seien  $\omega(x, y) := xdx + ydy$  und  $\eta(x, y, z) := zydx + xzdy + xydz$  differentialformen. Berechnen Sie  $\omega \wedge \eta$ .

**Aufgabe 11.4.** Sei  $\eta(x, y, z) := F(x, y, z)(dx \wedge dy) + G(x, y, z)(dy \wedge dz) + H(x, y, z)(dz \wedge dx)$  eine differentialform. Berechnen Sie  $d\eta$ .



Wintersemester 2010

H. Donder, A. Fackler, P. Garcia

## Analysis III Tutorium

### Lösungen

#### Aufgabe 11.1.

$$\begin{aligned}\varphi_1 \wedge \varphi_2((a_1, a_2), (b_1, b_2)) &= \begin{vmatrix} \varphi_1(a_1, a_2) & \varphi_1(b_1, b_2) \\ \varphi_2(a_1, a_2) & \varphi_2(b_1, b_2) \end{vmatrix} = \varphi_1(a_1, a_2)\varphi_2(b_1, b_2) - \varphi_2(a_1, a_2)\varphi_1(b_1, b_2) = \\ &= (2a_1 - 3a_2)(b_1 + b_2) - (a_1 + a_2)(2b_1 - 3b_2) = \\ &= 2a_1b_1 + 2a_1b_2 - 3a_2b_1 - 3a_2b_2 - 2a_1b_1 + 3a_1b_2 - 2a_2b_1 + 3a_2b_2 = \\ &= 5a_1b_2 - 5a_2b_1\end{aligned}$$

#### Aufgabe 11.2.

i.

Da  $\omega \wedge \omega = (-1)^{kk}\omega \wedge \omega$ , dann für  $k$  ungerade  $\omega \wedge \omega = -1(\omega \wedge \omega)$ . Deswegen  $\omega \wedge \omega = 0$ .

ii.

Sei  $\omega$  die 2-differentialform auf  $\mathbb{R}^4$  gegeben als  $\omega := \pi_1 dx_1 \wedge dx_2 + \pi_2 dx_3 \wedge dx_4$ , wo

$\pi_1(a, b, c, d) := a$  und  $\pi_2(a, b, c, d) := b$ . Dann

$$\omega \wedge \omega = \pi_1 \pi_2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + \pi_1 \pi_2 dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_2 = 2\pi_1 \pi_2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \neq 0.$$

#### Aufgabe 11.3.

$$\begin{aligned}\omega \wedge \eta &= (xdx + ydy) \wedge (zydx + xzdy + xydz) = \\ &= [(xdx + ydy) \wedge (zydx)] + [(xdx + ydy) \wedge (xzdy)] + [(xdx + ydy) \wedge (xydz)] = \\ &= xyz(dx \wedge dx) + zy^2(dy \wedge dx) + x^2z(dx \wedge dy) + xyz(dy \wedge dy) + x^2y(dx \wedge dz) + xy^2(dy \wedge dz) = \\ &= -zy^2(dx \wedge dy) + x^2z(dx \wedge dy) + x^2y(dx \wedge dz) + xy^2(dy \wedge dz) = \\ &= (x^2z - y^2z)(dx \wedge dy) + x^2y(dx \wedge dz) + xy^2(dy \wedge dz).\end{aligned}$$

#### Aufgabe 11.4.

$$d\eta = d(F(dx \wedge dy)) + d(G(dy \wedge dz)) + d(H(dz \wedge dx)).$$

$$\text{Aber } d(Fdx \wedge dy) = dF \wedge dx \wedge dy = \left(\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz\right) \wedge (dx \wedge dy) =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x}dx \wedge (dx \wedge dy) + \frac{\partial F}{\partial y}dy \wedge (dx \wedge dy) + \frac{\partial F}{\partial z}dz \wedge (dx \wedge dy) =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x}(dx \wedge dx \wedge dy) + \frac{\partial F}{\partial y}(dy \wedge dx \wedge dy) + \frac{\partial F}{\partial z}(dz \wedge (dx \wedge dy)) =$$

$$= 0 + 0 + \frac{\partial F}{\partial z}((-1)^{1*2}(dx \wedge dy) \wedge dz) = \frac{\partial F}{\partial z}(dx \wedge dy \wedge dz).$$

$$\text{Analog } d(G(dy \wedge dz)) = \frac{\partial G}{\partial x}(dx \wedge dy \wedge dz) \text{ und } d(H(dz \wedge dx)) = \frac{\partial H}{\partial y}(dx \wedge dy \wedge dz).$$

$$\text{Somit } d\eta = \left(\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}\right)(dx \wedge dy \wedge dz).$$